Kansrekening 29-11-'01

Tentamenopgave[1]

I

Een vaas bevat 10 rode en 20 blauwe ballen. Je trekt aselect een bal. Daarna wordt deze bal, samen met een bal van dezelfde kleur, terug gedaan in de vaas. Daarna trek je opniew een bal. Beschouw de gebeurtenissen:

$$A = \{\text{de eerste bal is blauw}\}$$

$$B = \{\text{de tweede bal is blauw}\}$$

Bepaal de kansen: $P(B \mid A)$ en $P(A \mid B)$.

II

Zij X een stochastische variabele die waarden aanneemt in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, en zij g_X de genererende functie, d.w.z. $g_X(s) = \sum_{k \geq 0} P(X = k)s^k$. We herinneren eraan dat voor de som $X + Y$ van twee onafhankelijke stochastische variabelen met waarden in $\mathbb{Z}_+$ geldt

(1) $$g_{X+Y} = g_X g_Y$$

1. Laat X een Poissonverdeling hebben met parameter $\lambda > 0$, d.w.z. $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

a. Bepaal de genererende functie g_X.

b. Bereken de verwachting en variantie van X m.b.v. a.

2. Laat voor $i = 1, \dots, r$ de stochastische variabelen X_i onafhankelijk zijn en geometrisch verdeeld met parameter p:

(2) $$P(X_i = k) = p^k q, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p$$

Zij $S = X_1 + \cdots + X_r$.

a. Bepaal de genererende functie g_S.

b. Bereken de kans $P(S = k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ met behulp van a.

Aanwijzing: maak gebruik van de binomiaalontwikkeling

(3) $$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1$$

III

Zij $(X_i)_{i \geq 1}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen met $P(X_i \leq t) = \int_0^t e^{-x}dx$ voor $t \geq 0$ en $P(X_i \leq t) = 0$ voor $t < 0$.

1. Bereken $E(X_i)$ en $\sigma^2(X_i)$.

2. Toon aan dat $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ verdeeld is met de dichtheid $Y(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}$ (waar $Y = 1_{[0,+\infty)}$ de Heaviside functie is).

Aanwijzing: We herinneren aan de dichtheid van de gammaverdeling met parameters $\alpha > 0$, $r > 0$: $\gamma_{\alpha,r}(x) = Y(x)\frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-rx}$ en aan het convolutieproduct $\gamma_{\alpha,r} * \gamma_{\beta,r} = \gamma_{\alpha+\beta,r}$.

3. Toon aan dat voor alle $\lambda \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\lambda\sqrt{n}+n} \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2/2}dx$$

Aanwijzing: Gebruik de centrale limiet stelling.

[1]De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk